Série 19

1. Décrivez l'ensemble réalisable ainsi que la loi de distribution de probabilité pour la somme de deux de dés à 6 faces équiprobables.
   Quelle est la probabilité de faire un nombre impair ?
   Quelle est la probabilité de faire un lacé plus grand ou égal à 9 ?

2. Exercice de recherche internet : trouvez l'équation de la courbe Gaussienne.

3. Soient $A,\ B \subseteq \Omega$ deux sous-ensembles d'espace réalisable discret. Prouvez que si les deux ensembles $A,\ B \subseteq \Omega$ sont disjoints (i.e. $A \cap B = \emptyset$), alors la probabilité de de l'union des deux sous-ensemble est $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Corrigé

1. $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Pour calculer les probabilités, il suffit de compter le nombre de fois qu'un résultat peut être obtenu :

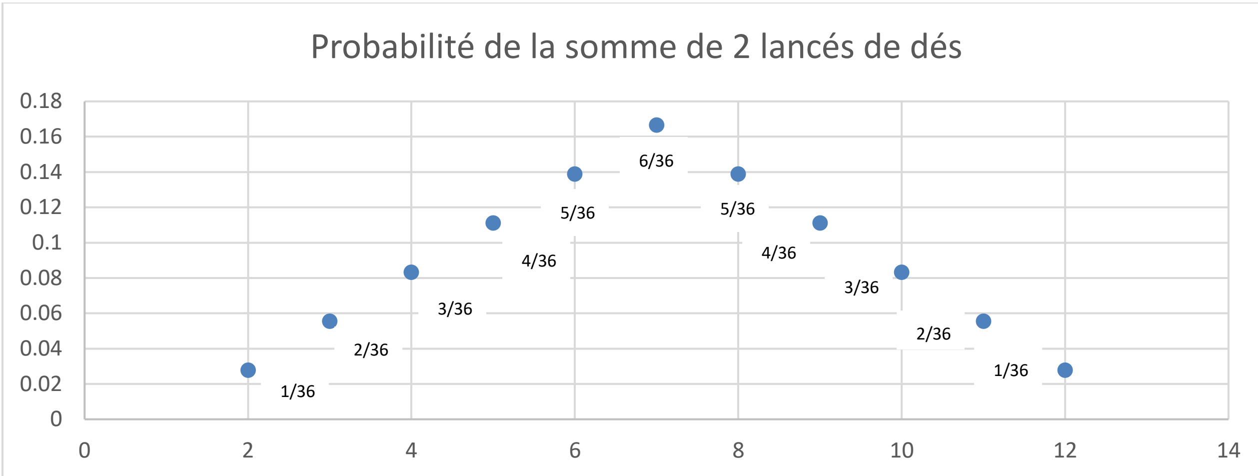
Lancé 1/2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

La somme des probabilités donne donc bien

$$\mathbb{P}(\Omega) = \frac{1}{36} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = \frac{36}{36} = 1.$$

$$\mathbb{P}(\text{impair}) = \mathbb{P}(1) + \mathbb{P}(3) + \mathbb{P}(5) + \mathbb{P}(7) + \mathbb{P}(9) + \mathbb{P}(11) = \frac{1}{36} \times (2 + 4 + 6 + 4 + 2) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\omega \geq 9) = \mathbb{P}(9) + \mathbb{P}(10) + \mathbb{P}(11) + \mathbb{P}(12) = \frac{1}{36} \times (4 + 3 + 2 + 1) = \frac{10}{36}$$



Et notez que

2. $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ où m est l'espérance (ce qui, dans notre cas, est égal à la moyenne) et σ est l'écart-type (notions que nous verrons toutes deux au cours !).

3. Dans le cas d'un ensemble discret, la probabilité d'un sous-ensemble est la somme des probabilités de chaque élément de l'ensemble.

   Or, comme $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B$ contient exactement une seule fois chaque élément de A et exactement une fois chaque élément de B. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{x\in A \cup B} \mathbb{P}(x) =^* \sum_{a\in A} \mathbb{P}(a) + \sum_{b\in A} \mathbb{P}(b) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

   La seconde égalité $*$ en regroupant les éléments par ensemble : $A \cup B$ contient uniquement des éléments de A ou des éléments de B, et les deux ensembles étant disjoints, la séparation par termes de A et des termes de B regroupe TOUS les éléments de $A \cup B$.