# Exercices Série 17

1) Calculez le résultat du produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & -4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$$

2) Calculez le résultat de la formule suivante

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & \pi \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ \frac{3}{4} & -\sqrt{2} \\ 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Montrez que tout point figurant sur une droite de vecteur directeur $\vec{d}$ passant par un point défini par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ en 3D peut s'écrire sous la forme d'un produit matrice-vecteur $\overrightarrow{OP} = M \times \vec{d} + \overrightarrow{OA}$.

# Réponses

1) $\begin{pmatrix} 94 & 60 \\ 62 & 83 \\ 5 & 42 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 + \frac{3\pi}{4} & 22 - \sqrt{2}\pi \\ -5 & 12 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

3) Rappelons que tout point sur la droite est défini par l'équation suivante :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda d_1 \\ a_2 + \lambda d_2 \\ a_3 + \lambda d_3 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les dimensions de la matrice $M$ : nous voulons que la taille du résultat de $M_{n,m} \times \vec{d}_{3,1} = \vec{y}_{3,1}$. Donc $m = 3$ (la matrice a 3 colonnes) pour que le produit matrice-

vecteur soit défini. De plus, pour que le résultat ait 3 lignes, la matrice doit avoir $n = 3$ lignes. $M_{3,3}$ est donc une matrice carrée de 3 lignes 3 colonnes.
Pour trouver ce qu'elle contient, observons que

$$M \times \vec{d} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} m_{11}d_1 + m_{12}d_2 + m_{13}d_3 \\ m_{21}d_1 + m_{22}d_2 + m_{23}d_3 \\ m_{31}d_1 + m_{32}d_2 + m_{33}d_3 \end{pmatrix} + \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda d_1 \\ a_2 + \lambda d_2 \\ a_3 + \lambda d_3 \end{pmatrix}$$

Donc le système à trouver est

$$\begin{cases} m_{11}d_1 + m_{12}d_2 + m_{13}d_3 = \lambda d_1 \\ m_{21}d_1 + m_{22}d_2 + m_{23}d_3 = \lambda d_2 \\ m_{31}d_1 + m_{32}d_2 + m_{33}d_3 = \lambda d_3 \end{cases}$$

Où les inconnues à trouver sont les coefficients de la matrice $m_{ij}$.

Il est aisé de se convaincre que $m_{11} = m_{22} = m_{33} = \lambda$ et que $m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$, ce qui donne alors que tout point sur la droite de direction $\vec{d}$ passant par le point $\overrightarrow{OA}$ est solution de l'équation matricielle suivante

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \times \vec{d} + \overrightarrow{OA}.$$

Il est donc possible d'écrire la multiplication par un scalaire d'un vecteur comme un produit matrice-vecteur, et d'écrire un système d'équations linéaires comme un produit matrice-vecteur plus un vecteur constant !