

Exercices Série 16

- 1) Trouvez l'équation cartésienne du plan contenant le point $\overline{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et perpendiculaire au vecteur $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Le point A et les points sont-ils sur le plan ?

$$\begin{pmatrix} 1.25 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2) Trouver l'intersection entre

- la droite D parallèle au vecteur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et passant par le point $\overline{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et
- le plan Π contenant les trois points $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 3) Trouvez l'équation de la droite correspondant à l'intersection du plan Π du point 2) et du plan horizontal (défini par $x_3 = 0$).

Réponses

- 1) Selon le développement vu au cours, nous avons que l'équation du plan est donnée par

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 - (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)$$

En remplaçant avec le point et la direction orthogonale donnée, cela donne

$$2p_1 - 3p_2 + 4p_3 - 8.5 = 0.$$

Pour vérifier si un point est bien dans le plan, il suffit de remplacer les coordonnées dans l'équation ci-dessus :

$$2(-1) - 3(0.5) + 4(3) - 8.5 = 0.$$

Le point A est donc bien dans le plan.

De même, on trouve que $\begin{pmatrix} 1.25 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est dans le plan (l'équation donne 0) mais avec $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

nous ne sommes pas dans le plan $-8.5 \neq 0$.

- 2) Les équations paramétriques de la droite D donnent le système suivant :

$$\begin{cases} t = \frac{p_1 - 1}{4} \\ t = \frac{p_2 - 5}{2} \\ t = \frac{p_3 - 2}{3} \end{cases}$$

L'équation cartésienne du plan Π est donné par une équation du type

$$\alpha \times p_1 + \beta \times p_2 + \gamma \times p_3 + \delta = 0$$

Comme nos 3 points doivent se trouver dans le plan, nous avons un système de 3 équations, 1 équation pour chaque point dans le plan :

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta + \delta = 0 & \text{1er point sur le plan} \\ 2\alpha + 2\beta - 2\gamma + \delta = 0 & \text{2e point sur le plan} \\ 4\alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 & \text{3e point sur le plan} \end{cases}$$

Le système ci-dessus donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{1}{2}\delta \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Posons $\delta = -2$, donc $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = 1$.

Donc, il s'agit du plan $p_2 - 2 = 0$ ou, autrement dit, le plan vertical $p_2 = 2$.

L'intersection de Π et D est donc un point $I = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$ qui est à la fois dans le plan Π (donc

$i_2 = 2$) et sur la droite D , donc $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Nous savons par les équations

paramétriques de la droite que $t = \frac{i_2 - 5}{2} = -\frac{3}{2}$ (car $i_2 = 2$ vue que $I \in \Pi$).

En remplaçant, cela donne donc $I = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2.5 \end{pmatrix}$.

- 3) Nous cherchons l'ensemble des points qui satisfait à la fois l'équation cartésienne du plan $\Pi \Rightarrow x_2 = 2$ et celle du plan $x_3 = 0$.

Tout point P sur la droite est donc défini par les deux contraintes

$$\begin{cases} p_2 = 2 \\ p_3 = 0 \end{cases}$$

Il s'agit donc de l'axe x_1 !