Exercices Série 15

1) Trouvez le système d'équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne de la droite passant par le point $A = (4, 1)$ et de direction ***parallèle*** à $\vec{x} = (1, 2)$.
Les points suivants sont-ils sur la droite ?
$$\overrightarrow{z_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \overrightarrow{z_2} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ?}$$

2) Trouvez l'équation cartésienne pour la droite définie avec les mêmes valeurs que l'exercice 1), mais cette fois-ci, $\vec{x}$ est un vecteur ***perpendiculaire*** à la droite recherchée (et non parallèle) !

3) Trouvez l'équation cartésienne de la droite passant par les points $A = (1, 2)$ et $B = (3, -1)$.

4) Calculez le produit vectoriel des vecteurs suivants
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Réponses

1) Le système d'équations paramétriques est donné par l'équation
$$P = A + t \times P\vec{x}$$
Le système d'équations paramétriques est alors
$$\begin{cases} p_1 = a_1 + x_1 t = 4 + t \\ p_2 = a_2 + x_2 t = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
L'équation cartésienne s'obtient en isolant t dans les deux équations ci-dessus, puis en postant $t - t = 0$ puis remplaçant t par les deux expressions données. On trouve ainsi
$$2p_1 - p_2 - 7 = 0.$$
Le point A est bien sur la droite car
$$2a_1 - a_2 - 7 = 2 \times 4 - 1 - 7 = 8 - 8 = 0.$$

Le point $\overrightarrow{z_1}$ est sur la droite car $2 \times 6 - 5 - 7 = 12 - 12 = 0$.
Le point $\overrightarrow{z_2}$ n'est pas sur la droite car $2 \times 8 - (-1) - 7 = 16 + 1 - 7 = 10 \neq 0$.

2) ci, l'équation cartésienne est donnée par la formule de la droite PERPENDICULAIRE, à savoir $x_1 p_1 + x_2 p_2 - (a_1 x_1 + a_2 x_2) = 0$, ce qui donne alors l'équation cartésienne

suivante :

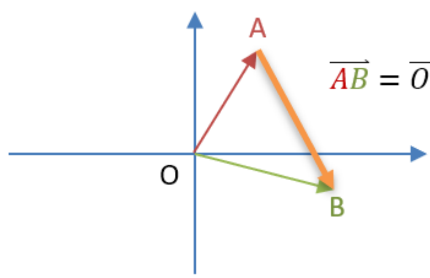
$$p_1 + 2p_2 - 6 = 0.$$

Vérifions que le point A est bien sur la droite :

$$a_1 + a_2 - 6 = 4 + 2 \times 1 - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Le point $\overrightarrow{z_1}$ n'est du coup PAS sur la droite car $6 + 2 \times 5 - 6 = 10 \neq 0$.
Le point $\overrightarrow{z_2}$ est sur la droite car $8 + 2 \times (-1) - 6 = 8 - 8 = 0$.

3) N'ayant que deux points, nous devons trouver un vecteur directeur. Or, ayant les vecteurs $\overrightarrow{OA} = (1{,}2)$ et $\overrightarrow{OB} = (3, -1)$, nous avons $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ et donc, en soustrayant $\overrightarrow{OA}$ des deux côtés, nous obtenons le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$:



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{3}{-1} - \binom{1}{2} = \binom{2}{-3}$$

Ayant désormais un vecteur directeur, il nous suffit d'applique la formule avec un vecteur directeur et un point, en utilisant soit le point A soit le point B. Avec A, l'équation cartésienne devient alors $-3p_1 - 2p_2 + 7$.
Vérifions que A et B sont bien sur la droite :
A : $-3a_1 - 2a_2 + 7 = -3 \times 3 - 2 \times (-1) + 7 = -9 + 2 + 7 = 0$.
B : $-3b_1 - 2b_2 + 7 = -3 \times 1 - 2 \times 2 + 7 = -3 - 4 + 7 = 7 - 7 = 0$.

4)

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 2 - 3 \times 1 \\ -(2 \times 2 - 3 \times (-1)) \\ 2 \times 1 - (-1) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$