Exercices Série 14

1) Vérifiez que les ensembles de vecteurs suivants sont 2 à 2 non-colinéaires. De plus, la famille de vecteurs est-elle libre ?

a) $\left\{ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 16 \\ 17 \\ 38 \end{pmatrix} \right\}$

c) $\left\{ \vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2) Trouvez le système d''équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne de la droite passant par le point $A = (1, 3)$ et de direction parallèle à $\vec{x} = (-3, 2)$.
Les points suivants sont-ils sur la droite ?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 3.5 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2.75 \end{pmatrix} \ ?$$

Réponses

1) Prenons point par point :
a) nous avons 3 vecteurs de 2 dimensions, donc forcément, la famille n'est PAS libre. En revanche les vecteurs sont tous non-colinéaires deux à deux.
Pour montrer que, par exemple, que $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ne sont PAS colinéaires, nous pouvons calculer le produit scalaire et vérifier qu'il n'est pas égal à $\pm$ le produit des normes :

$$< \vec{x}_1, \vec{x}_2 > = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$$
$$\|\vec{x}_1\| \times \|\vec{x}_2\| = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 3.16 \neq \pm 3.$$

b) ici, nous pouvons résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 16\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 17\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 38\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En additionnant la 2e ligne aux 2 autres, on obtient

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + 33\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 17\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 + 55\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

On observe facilement que la 1ère et la 3e ligne sont équivalentes à $\lambda_2 + 11\lambda_3 = 0$. On a donc deux égalités redondantes et ainsi un système d'équations sous-déterminé (2 contraintes, 3 variables).
Choisissons, par exemple, $\lambda_3 = 1$, alors $\lambda_2 = -11\lambda_3 = -11$.
Et finalement $\lambda_1 = 2\lambda_2 + 17\lambda_3 = 2(-11) + 17 = -5$.

Nous vérifions que la combinaison linéaire vaut 0 :

$$-5\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - 11\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\17\\38\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5-11+16\\5-22+17\\-5-33+38\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Il existe donc une combinaison linéaire NON NULLE des 3 vecteurs donnant le vecteur nul, par conséquent, les 3 vecteurs ne sont PAS libres.

c) de manière similaire à b), on trouve le système d'équations linéaires suivant :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0\end{cases}$$

En soustrayant la 1ère ligne aux deux autres, on trouve

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \quad -2\lambda_2 = 0\\ \quad\quad -2\lambda_3 = 0\end{cases}$$

Autrement dit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ => l'unique solution à l'équation (vectorielle)

$$\lambda_1\vec{z}_1 + \lambda_2\vec{z}_2 + \lambda_3\vec{z}_3 = \vec{0}.$$

Il s'agit donc d'une famille de vecteurs libres !

NOTE : pour vérifier que 2 vecteurs sont non-colinéaires 2 à 2, il suffit à chaque fois de calculer leur produit scalaire et vérifier qu'il n'est pas égal au produit des normes (ce qui est quelque peu fastidieux mais suffisamment facile à faire pour ne pas détailler tous les calculs ici ! Vous pouvez faire un petit scripte ou une table Excel pour le vérifier !)
De plus, inutile de vérifier que les vecteurs sont colinéaire s'ils forment une famille libre !

2) Le système d'équations paramétriques est donné par l'équation

$$P = A + t \times P\vec{x}$$

Le système d'équations paramétriques est alors

$$\begin{cases}p_1 = 1 - 3t\\ p_2 = 3 + 2t\end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

L'équation cartésienne de tout point $P = (p_1, p_2)$ sur la droite parallèle à $\vec{x}$ et passant par $A = (a_1, a_2)$ se trouve en isolant $t \in \mathbb{R}$ dans les deux équations et poser l'égalité entre les deux membres, ce qui donne
$\frac{-p_1+1}{3} = \frac{p_2-3}{2}$, donc (en inversant le signe car si $t = t$ alors $-t = -t$)

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{11}{6} = 0}$$

Vérifions que $A = (1,3)$ est bien sur la droite :

$$\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 - \frac{11}{6} = \frac{2+9-11}{6} = 0.$$

De manière similaire, nous vérifions que $\vec{x}$ est sur la droite car

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} - \frac{11}{6} = \frac{1+21-22}{12} = 0.$$

Pour le second point, nous vérifions que

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{11}{4} - \frac{11}{6} = \frac{4+33-44}{24} = -\frac{7}{24} \neq 0$$

Donc le second point n'est pas sur la droite !