Exercices Série 13

1) Trouvez l'angle entre $\vec{x} = (2,3)$ et $\vec{y} = (5,-1)$.

2) Prouvez que si deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit scalaire est égal au produit de leurs normes, au signe près :
$$< \vec{x}, \vec{y} >= \pm \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

3) Montrez que $\|\vec{x}\| = \sqrt{< \vec{x}, \vec{x} >}$.

Réponses

1) Par la formule vue au cours
$\theta = Arcos\left(\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}\right) = Arcos\left(\frac{2\cdot 5+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+(-1)^2}}\right) = Arcos\left(\frac{2\cdot 5+3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+(-1)^2}}\right)$
$\theta = 1.180\ RAD = 67.61°$.
NOTE : La formule pour convertir les radians vers les degrés est
$$X\ [RAD] \times \frac{180}{\pi} = Y\ [DEG]$$
Et donc pour passer des degrés en radians on a la formule
$$X\ [RAD] = Y\ [DEG] \times \frac{\pi}{180}$$

2) Preuve en « si et seulement si »
A : les vecteurs sont colinéaires
B : $< \vec{x}, \vec{y} >= \pm \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$

A => B : Si les vecteurs sont colinéaires, ils forment un angle de 0° ou de 180°. Dans ce cas, le cosinus de l'angle est
$$Cos(\theta) = \pm 1 = \frac{< \vec{x}, \vec{y} >}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$$
Ainsi, en multipliant par $\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ des deux côtés de l'équation, on obtient que $< \vec{x}, \vec{y} >= \pm \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$. Ce qui prouve A => B !

A <= B : $< \vec{x}, \vec{y} >= \pm \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ alors en divisant par $\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ des deux côtés, on obtient $\pm 1 = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$. Or, $\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$ est la définition du cosinus de l'angle, par conséquent
$$\cos(\theta) = \pm 1$$
ce qui implique que $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$, donc les deux vecteurs on la même direction.

CQFD !

3) $<\vec{x},\vec{x}> = x_1x_1 + x_2x_2 = (x_1)^2 + (x_2)^2$. Donc $\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>} = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = \|\vec{x}\|$.
CQFD !