Exercices Série 12

1) Montrez que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants si et seulement si il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{y} = \alpha\vec{x}$

2) Trouvez 3 vecteurs linéairement indépendants (non-colinéaires) deux à deux dans $\mathbb{R}^2$ et prouvez que le 3e vecteur trouvé peut être écrit comme combinaison linéaire des deux premiers.

3) Montrez que la multiplication par un scalaire est distributive par rapport à l'addition de deux vecteurs, donc que $(\lambda + \mu)\ (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y} + \mu\vec{x} + \mu\vec{y}$.

Réponses

1) Preuve de si et seulement si => deux sens

A: $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement indépendants

B: il existe $\alpha\ \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{y} = \alpha\vec{x}$

<u>A => B:</u> par définition, si deux vecteurs sont liés, alors il existe $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tels que $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$, donc $\lambda_1\vec{x} = -\lambda_2\vec{y}$.

Or, comme $\lambda_2 \neq 0$, on peut diviser par $-\lambda_2$ et on aura

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_2}\vec{x} = \vec{y}$$

Il suffit de poser $\alpha = \frac{\lambda_1}{-\lambda 2} \neq 0$ (car λ_1 et λ_2 sont non nuls). Ce qui prouve A => B !

<u>B => A:</u> Si $\alpha\vec{x} = \vec{y}$, posons $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = -1$, alors on a que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.

De plus

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \alpha\vec{x} + (-1)\vec{y} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$$

Il existe donc une combinaison linéaire des deux vecteurs avec deux scalaires non-nuls (α et -1) qui engendrent le vecteur nul, donc que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants.

Ce qui prouve B => A !

2) Par exemple $\vec{x} = (1, 2)$ $\vec{y} = (-1, 2)$ et $\vec{z} = (3,\ 0)$

Pour vérifier que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont liés, nous devons trouver λ_1 et λ_2 tels que :
$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ et $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Autrement dit, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2$ ET $\lambda_1 = -\lambda_2$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont donc libres.

De manière similaire, prenons $\vec{x}$ et $\vec{z}$, alors on doit avoir
$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ et $2\lambda_1 = 0$. Autrement dit, on doit avoir $\lambda_1 = 0$ (de la seconde équation), ce qui implique que $\vec{x}$ et $\vec{z}$ sont libres. Le même raisonnement s'applique pour $\vec{y}$ et $\vec{z}$.

Pour la seconde partie, nous devons trouver λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{z}$
Autrement dit :

$$\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times (-1) = 3$$
$$\lambda_1 \times 2 + \lambda_2 \times 2 = 0$$

De la seconde équation, nous tirons $\lambda_1 = -\lambda_2$, et remplaçons λ_1 par $-\lambda_2$ dans la première, nous obtenons

$$-\lambda_2 \times 1 + \lambda_2 \times (-1) = -2\lambda_2 = 3$$
$$\lambda_1 = -\lambda_2$$

Donc, nous avons $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{3}{2}$ (qui tous deux sont non-nuls) !
Vérifions :

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \frac{3}{2}\binom{1}{2} - \frac{3}{2}\binom{-1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{6}{2} - \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \binom{3}{0} = \vec{z}.$$

$\vec{z}$ peut donc bel et bien être écrit comme une combinaison linéaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

3) Il s'agit ici d'une preuve « par l'accordéon », il suffit de développer et réarranger par successions d'égalités pour obtenir le résultat final. La preuve est faite à 2 dimensions, mais par extension, cela s'applique aussi à N dimensions.

$$(\lambda + \mu) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (\lambda + \mu) \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu) \cdot (x_1 + y_1) \\ (\lambda + \mu) \cdot (x_2 + y_2) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 + \lambda \cdot y_1 + \mu \cdot x_1 + \mu \cdot y_2 \\ \lambda \cdot x_2 + \lambda \cdot y_2 + \mu \cdot x_2 + \mu \cdot y_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \binom{x_1}{x_2} + \lambda \cdot \binom{y_1}{y_2} + \mu \cdot \binom{x_1}{x_2} + \mu \cdot \binom{y_1}{y_2} =$$
$$\lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y} + \mu \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{y}.$$

CQFD.

Remarque : pour clarifier qu'il y a divers opérateurs surchargés, nous avons utilisé le code couleurs suivants :

$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (l'addition de scalaires usuelle)

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (la multiplication de deux scalaires usuelle

$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (l'addition de deux vecteurs)

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (la multiplication d'un vecteur par un scalaire)