Exercices Série 7

1. Prouvez que l'ensemble de entiers relatifs $\mathbb{Z}$ peut être décomposé en N sous-ensembles disjoints $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_\mathrm{n}$ ou $\mathrm{E}_\mathrm{i} = \{x \mid x \equiv_N i\}, i = 0, \ldots, N-1$.

2. Montrez que $a + b \equiv_N (a \, mod \, N) + (b \, mod \, N)$.

3. Trouvez un nombre a tel $a \times 10 \equiv_{23} 1$.

4. Est-il possible de trouver un élément $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \times 10 \equiv_{12} 1$?

Corrigé :

1. Par définition, quel que soit $x \in \mathbb{Z}$, $x \, mod \, N = k \in [0, \ldots, N-1]$, donc il existe un ensemble E_i tel que $x \in E_i$: il s'agit de E_k. Cela prouve que les E_i couvrent TOUS les entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
Reste à prouver qu'ils sont disjoints. Supposons par l'absurde qu'il existe un $x \in \mathbb{Z}$ appartenant à 2 sous-ensembles différents, disons E_i et E_j.
Donc, comme $x \in E_i => x = k_i \times N + i$ et comme $x \in E_j => x = k_j \times N + j$ avec $i \neq j$. Cela implique que comme $k_i \times N + i = k_j \times N + j$ et donc que $i = (k_j - k_i) \times N + j$ et donc que $i \equiv_N j$. Or comme $i, j \in [0, \ldots, N-1]$ (par définition du modulo), on a que $i = j$, ce qui contredit $i \neq j$! Ainsi, il n'est pas possible qu'un élément soit dans deux ensembles simultanément.
CQFD.

2. Partons de $a \, mod \, N + b \, mod \, N$:
Si $a \, mod \, N = x$ et $b \, mod \, N = y$ alors on veut montrer que $x + y \equiv_N a + b$.
Par définition, $a = i \times N + x$ et $b = j \times N + y$, donc
$$a + b = i \times N + x \, j \times N + y = (i + j) \times N + (x + y)$$
Lorsque l'on prend la congruence, on peut ignorer tous les multiples de N, donc $a + b \equiv_N x + y = a \, mod \, N + b \, mod \, N$.
CQFD.

3. $7 \times 10 = 70 = 3 \times 23 + 1 \equiv_{23} 1$.

4. Non dans ce cas il n'est pas possible de trouver un tel élément. En effet, il faudrait trouver x et y tels que $10 \times x = 12 \times y + 1$ donc $x = \frac{12y+1}{10}$.

   Pour que x soit un nombre entier, il faut donc que $12y + 1$ soit un multiple de 10, ce qui est le cas si $12y$ se termine par 9. Or aucun multiple de 12 ne peut jamais terminer par 9 (tous les multiples de 12 sont pairs !). Donc, il n'existe pas de nombre tel que $a \times 10 \equiv_{12} 1$.