Exercices Série 6

1) Calculez le PGCD et le PPCM de 1197 et 4991

2) Calculez le PGCD(124, 1430) et donnez l'équation de Bachet-Bézout
Rappel : La formule de Bachet-Bézout est $a \times u + b \times v = PGCD(a, b)$.

3) Prouvez qu'il existe une paire de coefficients de Bézout tels que $a \times u + b \times v = PGCD(a, b)$ avec $u = 0$ ou $\mathrm{v} = 0$ si et seulement si b divise a ou a divise b.

Réponses

1) 1197 = 3*3*7*19 et 4991 = 7*23*31
Donc PGCD = 7 et PPCM = 1197*4991/PGCD = 853'461.

2) PGCD(124, 1430) = 2 = -15 x 1430 + 173 x 124

3) Preuve «A si et seulement si B» demande de faire la preuve dans les deux sens :

NOTE : il semble évident de dire que PGCD(a,b) <= a et PGCD(a,b) <= b !

A : il existe une paire de coefficients de Bézout tel que u ou v vaut 0

B : b divise a ou a divise b

A => B :
S'il existe une paire de coefficients de Bézout tel que u vaut 0 (le raisonnement sera le même pour v), alors on sait que PGCD(a, b) = 0*a + v*b.
Or, comme PGCD(a,b) <= b, on a forcément que $v = 1$ et donc que PGCD(a,b)=b.
Ainsi, on sait que b divise à la fois a et b (par définition du PGCD), donc nous avons prouvé que b divise a.

B => A :
Si b divise a (le raisonnement est le même pour a divise b), alors on sait que tous les diviseurs de b divisent également a, donc le PGCD(a, b) >= b. Or, comme on sait que le PGCD(a,b) <= b, alors PGCD(a,b) = b = 0*a + 1*b, donc il existe une paire de coefficients de Bézout tel que u = 0.
Cela prouve les deux sens. CQFD.