Exercices Série 12

Soit une application linéaire définie par $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}$$

1) Exprimez l'application linéaire ci-dessous sous forme de produit matrice-vecteur dans la base canonique.

2) L'application ci-dessus est exprimé avec la base canoniques de $\mathbb{R}^3$, mais une base non-canonique B' de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de la même application linéaire, si on l'exprime en partant de vecteurs en base B pour arriver dans des vecteurs en base canonique, avec les vecteurs de base suivants :
Pour $\mathbb{R}^3$: $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et pour $\mathbb{R}^2$: $\vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b'}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Réponses

1) $A = (f(\vec{e}_1) \quad f(\vec{e}_2) \quad f(\vec{e}_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

2) Commençons par trouver $A_B = A \times M_{3\times3}^{C\to B}$ où $M_{3\times3}^{C\to B}$ est la matrice 3×3 pour convertir un vecteur $(\vec{x})_B = M_{3\times3}^{C\to B}(\vec{x})_C$. Selon le cours nous avons que

$$M_{3\times3}^{B\to C} = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \quad \vec{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'application en base B est donnée par

$$A_B = A \times M_{3\times3}^{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet

$$A_B(\vec{b}_1)_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_C = A(\vec{b}_1)_C.$$

NOTE : on peut aussi trouver $A_B = (f(\vec{b}_1) \quad f(\vec{b}_2) \quad f(\vec{b}_3))$.

Il faut encore exprimer le résultat, qui est actuellement en base B', dans la base canonique. Tout vecteur de la base B' peut être converti en la base canonique de manière suivante :

$(\vec{y})_C = M_{2\times2}^{B'\to C}(\vec{x})_C$ avec $M_{2\times2}^{B'\to C} = (\vec{b}_1 \quad \vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Finalement, nous avons que

$(\vec{y})_C = M_{2\times2}^{B'\to C}(\vec{y})_{B'} = M_{2\times2}^{B'\to C} A_B (\vec{y})_B$ et donc l’application linéaire est donnée par la matrice

$$M_{2\times2}^{C\to B'} A_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifions le résultat final pour un vecteur quelconque, disons $(\vec{x})_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B$.

Si nous utilisons l’application partant de la base B directement vers la base canonique nous obtenons :

$$(\vec{y})_C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_C$$

En base canonique nous avons que $(\vec{x})_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_C$

$$(\vec{y})_{B'} = A(\vec{x})_C = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}_{B'} = M_{2\times2}^{C\to B'}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_C.$$