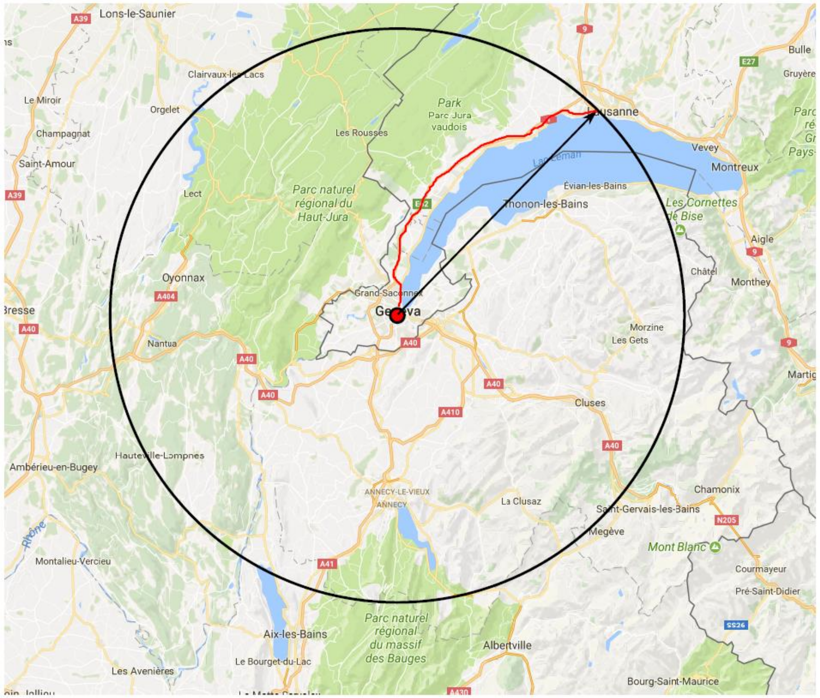
Mathématiques en technologies de l'information 1

Chapitre 3
Géométrie Vectorielle

Exemple d’espace vectoriel

Une carte géographique

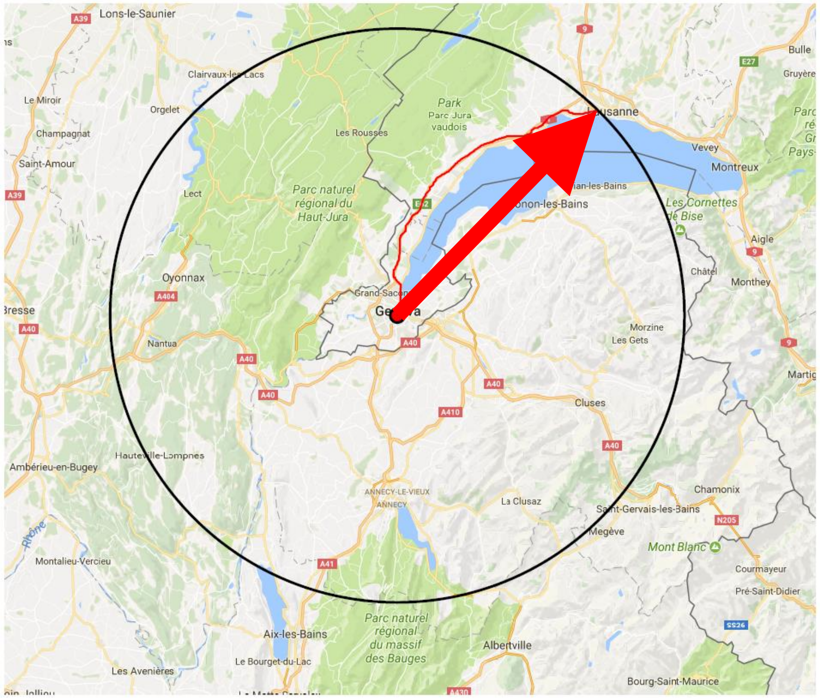


Question :
Peut-on déterminer la destination avec uniquement le point de départ et la distance ?

Exemple d'espace vectoriel

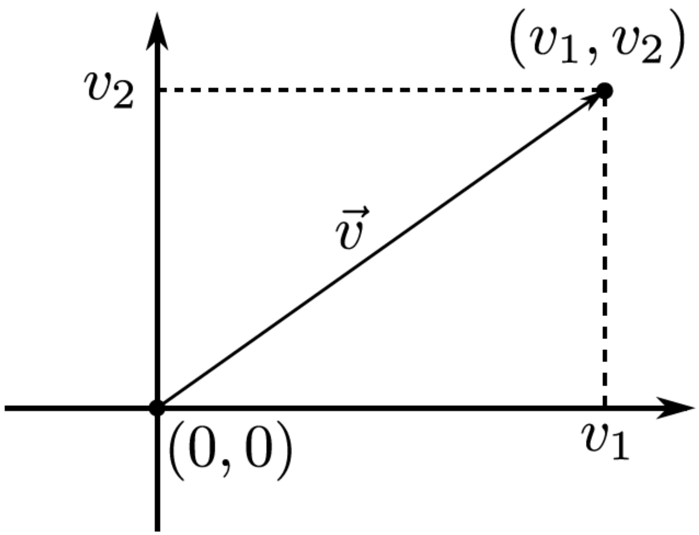
<u>Réponse :</u>
Non, il nous faut encore une ***<u>direction</u>****.*

Cette direction est appelée un ***<u>vecteur</u>***.



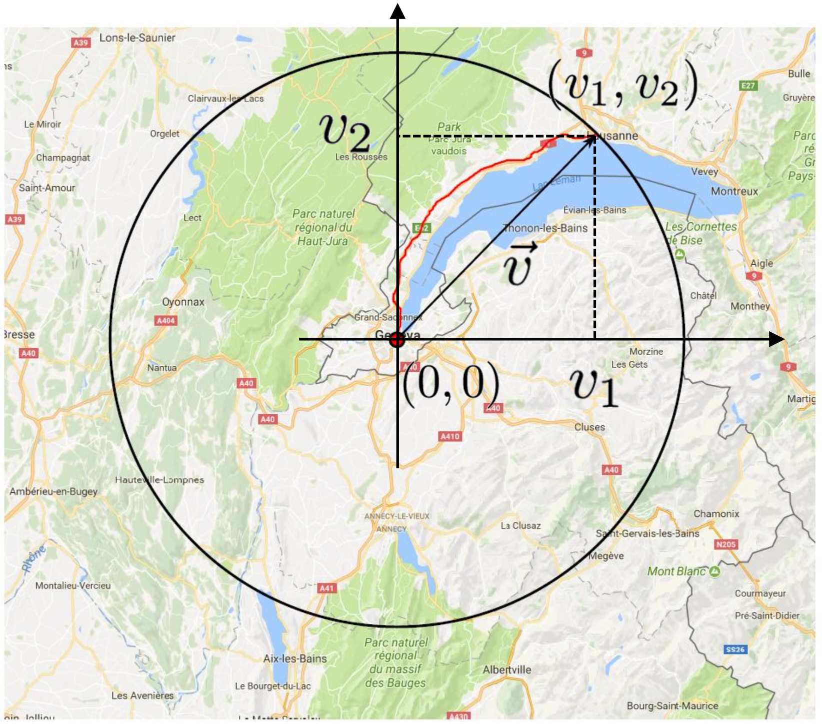
Notation vectorielle en 2 dimensions

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$



Exemple d'espace vectoriel

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$



Scalaire vs Segment orienté

Dans l’exemple précédent, il y a deux notions :

1. La ***distance***, qui est une notion numérique avec une valeur définie (p.ex. km), que nous appelons un ***scalaire***.

2. La ***direction***, elle, comporte une notion d’espace (origine, sens, direction).

Segment orienté

Dans l'exemple précédent, nous avions un segment orienté partant d'un point a et se terminant en un autre point b.

Notons que toute paire de points $[v_1, v_2]$ définit un segment de droite de manière unique.

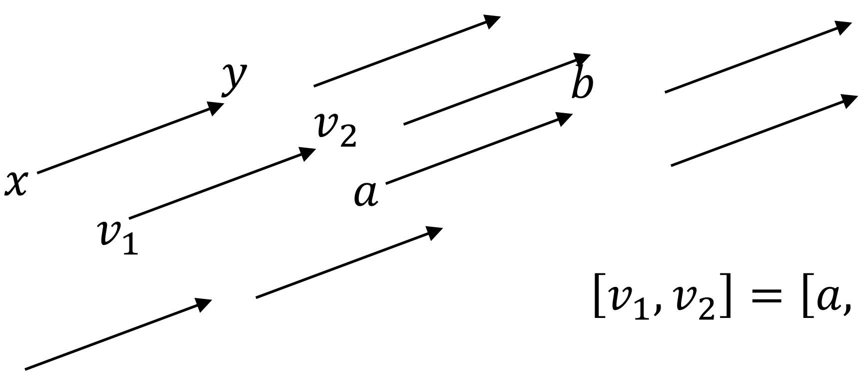
De plus, l'ordre donne la direction car $v_1 \rightarrow v_2$ est de sens inverse à $v_2 \rightarrow v_1$.

Toute paire de points $[v_1, v_2]$ donne donc la définition d'un ***segment de droite orienté***.

Segment orienté

Deux segments orientés sont dits ***équivalents*** s'ils sont
- parallèles,
- de même sens,
- est de même longueur.

En d'autre termes, l'équivalence de deux segments implique que deux segments équivalents sont identiques, à une ***translation près*** !



$$[v_1, v_2] = [a, b] = [x, y]$$

Vecteur

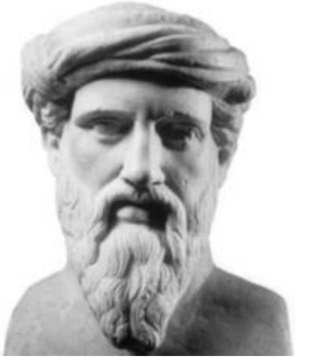
On appelle un ***<u>vecteur</u>***, noté $\vec{v}$, l'ensemble des segments équivalents à un segment orienté $[v_1, v_2]$.

$[v_1, v_2]$ est dit un représentant du vecteur $\vec{v}$.

$\vec{v}$ est entièrement déterminé par :

- Une direction (droite),
- Un sens,
- La longueur, appelée la ***<u>norme</u>*** du vecteur est qui s'écrit $||\vec{v}||$.

Théorème de Pythagore



La longueur du vecteur est appelée la ***norme*** du vecteur et se note comme suit

$$||\vec{v}||$$

et se calcule par $$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Notations (dans le plan)

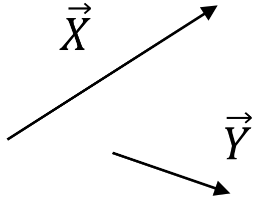
- Un vecteur $\vec{v} = [v_1, v_2]$,
- La norme d'un vecteur $\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$,
- Le vecteur nul (et de norme nulle) est noté $\vec{0}$. Il n'a pas de direction déterminée et peut être représenté par n'importe quel point $\vec{0} = [v_1, v_1] = [v_2, v_2]$ …

Le concept d'addition

La chasse au trésor:

- A partir du point 0, faire 10 pas dans la direction X,
- Puis 3 pas dans la direction Y.

Notez que par définition du vecteur, 10 pas dans la direction X correspond à un vecteur $\vec{X}$ uniquement défini (direction + longueur), idem pour $\vec{Y}$!



Le concept d'addition

La chasse au trésor:

- A partir du point 0, faire 10 pas dans la direction X,
- Puis 3 pas dans la direction Y.

Notez que par définition du vecteur, 10 pas dans la direction X correspond à un vecteur $\vec{X}$ uniquement défini (direction + longueur), idem pour $\vec{Y}$!

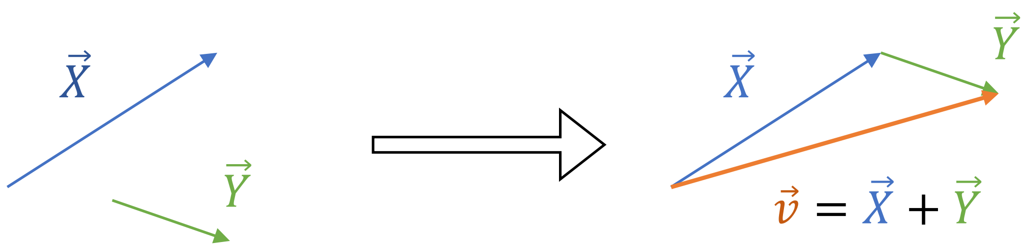
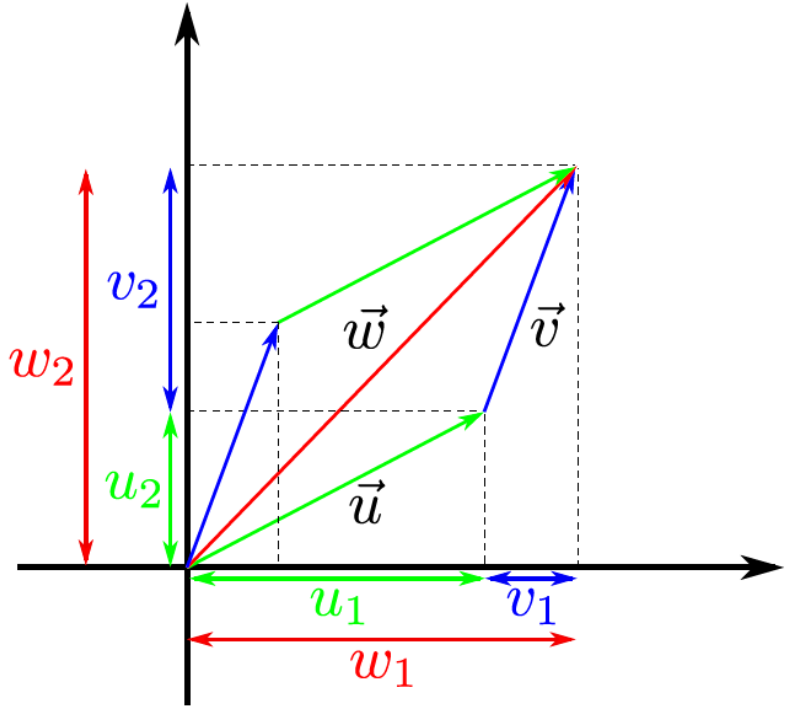


Illustration en 2 dimensions

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$$

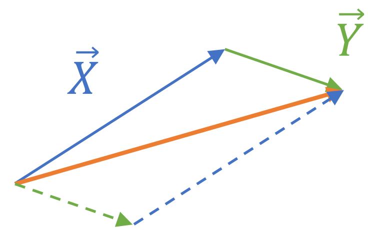


Addition de vecteurs

Pour 2 vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ donnés, on définit la somme des vecteurs

$$\vec{v} = \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

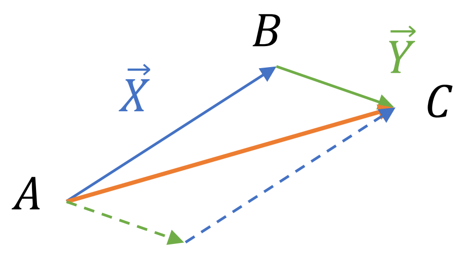
La somme est commutative ! (Facile à vérifier géométriquement) !



Relation des Chasles

Tout vecteur est uniquement déterminé par 2 points (son origine et son arrivée).
Notons $\vec{x} = \overline{AB}$ le segment orienté et $\vec{y} = \overline{BC}$, alors on la relation de Chasles donnera

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$



Addition de vecteurs à *n* dimensions

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

L'élément neutre

Il existe un élément neutre pour l'addition, à savoir $\overrightarrow{0}$, car

$$\vec{x} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + \vec{x} = \vec{x}.$$

Le vecteur inverse

Tout vecteur $\vec{x}$ a un vecteur inverse $-\vec{x}$ de sorte que

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = -\vec{x} + \vec{x} = \vec{0}.$$

Exercice

Trouver l'inverse des vecteurs suivants

$\vec{x} = (1, 2)$,

$\vec{y} = (-1, 2)$,

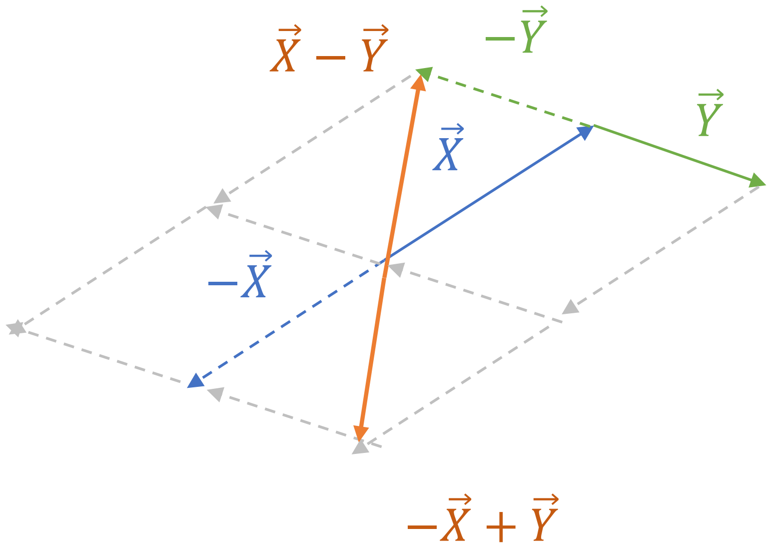
$\vec{z} = (z_1, z_2)$.

Soustraction de vecteurs

La soustraction d'un vecteur n'est rien d'autre que l'addition de l'opposé du vecteur

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}).$$

Le concept de la soustraction



Propriétés de l'addition

Soient $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ trois vecteurs quelconques, alors

- Commutativité : $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- Associativité : $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- Elément neutre : $\vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}$
- Existence d'un élément inverse :

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{0}.$$

Multiplication par un scalaire

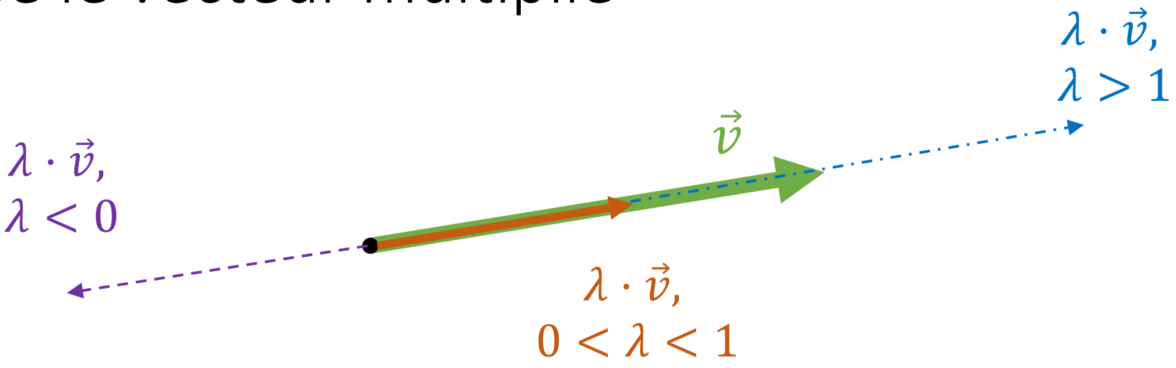
Soient $\vec{x}$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire, alors on définit le produit scalaire comme

$$\lambda \times \vec{x} = \lambda\vec{x} = (\lambda \times x_1, \lambda \times x_2)$$

Cela revient à multiplier chaque élément du vecteur par le même scalaire.

Note

- La direction du vecteur résultant est la même que le vecteur d'origine,
- La multiplication scalaire allonge / raccourci ou inverse le vecteur multiplié



Exercice

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2)$ un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire, montrez que

$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \times \|\vec{x}\|.$$

Exercice - corrigé

$$\|\lambda\vec{x}\| = \sqrt{(\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2} = \sqrt{\lambda^2(x_1)^2 + \lambda^2(x_2)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda^2((x_1)^2 + (x_2)^2)} = |\lambda| \times \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

$$= |\lambda| \times \|\vec{x}\|$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire

Soient $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux scalaires quelconques, alors

- $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- $(\lambda + \mu)\,\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
- $(\lambda \times \mu)\,\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
- $0\vec{x} = \vec{0}$
- $1\vec{x} = \vec{x}$
- $\lambda\vec{0} = \vec{0}$

Combinaison linéaire

Soient $\vec{x}, \vec{y}$ deux vecteurs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux scalaires quelconques, alors le vecteur $\vec{z}$ suivant est appelé une ***combinaison linéaire*** des deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$

$$\vec{z} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$$

Cela s'applique également à un ensemble plus grand de vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N$ et de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ et

$$\vec{z} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_N\vec{x}_N$$

Dépendance linéaire

Deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ sont dits ***linéairement dépendants*** s'il existe un scalaire non-nul $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = \vec{0}$$

S'il n'existe pas de combinaison linéaire de ce type, on dit que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont ***linéairement indépendants***.

Des vecteurs linéairement indépendants son également dits «***libres***», alors que s'ils sont dépendants, on dira qu'ils sont «***liés***».

Exercice

Montrez que deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y}$ ***linéairement dépendants*** si et seulement si il existe un scalaire non-nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\lambda\vec{x} = \vec{y}$$

Exercice

Preuve de si et seulement si => deux sens
A: $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants
B: il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$

A => B: par définition, si deux vecteurs sont liés, alors il existe $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$ tels que $\mu_1\vec{x} + \mu_2\vec{y} = \vec{0}$, donc $\mu_1\vec{x} = -\mu_2\vec{y}$.
Or, comme $\mu_2 \neq 0$, on peut diviser par $-\mu_2$ et on aura

$$\frac{\mu_1}{-\mu_2}\vec{x} = \vec{y}$$

Il suffit de poser $\lambda = \frac{\mu_1}{-\mu 2} \neq 0$ (car μ_1 et μ_2 sont non nuls). Ce qui prouve A => B !

Exercice - suite

B => A: Si $\lambda\vec{x} = \vec{y}$, posons $\mu_1 = \lambda$ et $\mu_2 = -1$, alors on a que $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}^*$.

De plus

$$\mu_1\vec{x} + \mu_2\vec{y} = \lambda\vec{x} + (-1)\vec{y} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$$

Il existe donc une combinaison linéaire des deux vecteurs avec deux scalaires non-nuls (λ et -1) qui engendrent le vecteur nul, donc que $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont linéairement dépendants.

Ce qui prouve B => A !

Base Génératrice

Soit V_2 l'ensemble de tous les vecteurs du plan.

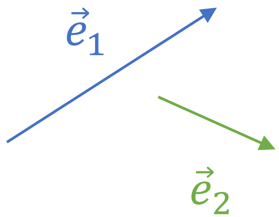
On appelle une ***base génératrice*** (ou simplement base) de V_2 un ensemble de vecteurs $\boldsymbol{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tels que tout vecteur $\vec{x} \in V_2$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.
Autrement dit,

$$\forall \vec{x} \in V_2, \exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \mid \vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2$$

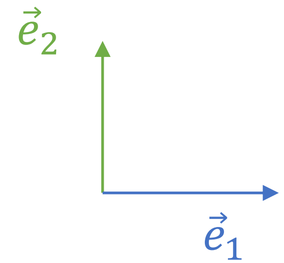
On appelle le couple (λ_1, λ_2) les composantes de $\vec{x}$ dans la base $\boldsymbol{B}$, et on peut écrire

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{B}}$$

Exemples de bases génératrices



Une base peut être quelconque



Base orthogonale :
les vecteurs sont perpendiculaires

Note

Il est possible d'avoir une base génératrices avec plus de 2 vecteurs dans V_2 (p.ex. 3 vecteurs linéairement indépendants entre eux).

Toutefois, le 3e vecteur pouvant être écrit comme combinaison linéaire des deux premiers, il n'a que peu d'utilité dans la base génératrice.

Exercice :

Trouvez 3 vecteurs linéairement indépendants dans V_2 et prouvez que le 3^e vecteur trouvé peut être écrit comme combinaison linéaire des deux premiers.

Base Orthonormée

Soit V_2 l'ensemble de tous les vecteurs du plan.

On appelle une ***base orthonormée*** de V_2 un ensemble de vecteurs $\boldsymbol{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tels que

- $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ($\vec{e}_1$ est orthogonal avec $\vec{e}_2$),
- $\|\vec{e}_1\|$= $\|\vec{e}_2\| = 1.$

Ecriture en base

Soit $\boldsymbol{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ une base V_2 et $\vec{x}, \vec{y} \in V_2$ tels que
$\vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{B}}$ et $\vec{y} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{B}}$

Alors

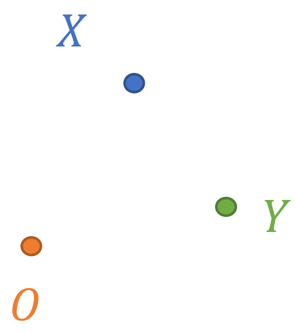
$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \mu_1 \\ \lambda_2 + \mu_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{B}}$$

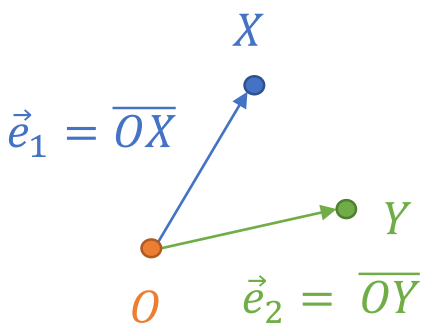
Et

$$\alpha \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \lambda_1 \\ \alpha \cdot \lambda_2 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{B}}$$

Repère vs Base

Un repère est défini par trois points non-alignés $O, X, Y \in V_2$. Alors on dira que la base $\boldsymbol{B} = \{\overline{OX}, \overline{OY}\}$ est la base engendrée par le repère $\{O, X, Y\}$.





Repère vs Base

On parlera de repère orthonormé si la base engendrée par les repère est orthonormé.

Exercice : trouvez un repère orthonormé.

En 3 dimensions

En 3 dimensions, un vecteur sera représenté dans un repère à 3 composantes. La base canonique est

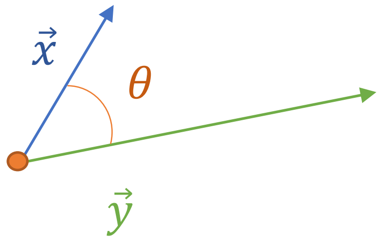
$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$

Vecteur orthogonaux

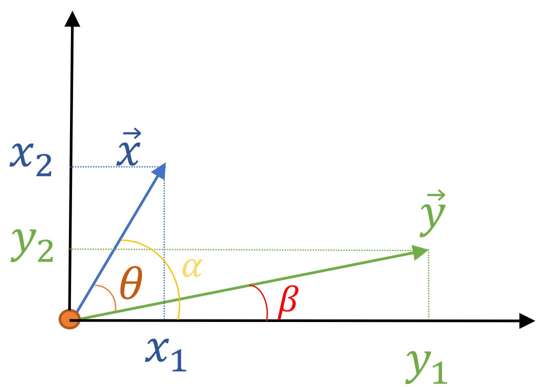
Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des vecteurs orthogonaux (à angle droit), nous savons (par Pythagore) que

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Que se passe-t-il si l'angle entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ n'est pas droit $(\pi/2)$?



Dans le repère orthonormé



Relations trigonométriques

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\cos(\alpha) = \frac{x_1}{\|\vec{x}\|} \qquad \sin(\alpha) = \frac{x_2}{\|\vec{x}\|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{y_1}{\|\vec{y}\|} \qquad \sin(\beta) = \frac{y_2}{\|\vec{y}\|}$$

Calcul de l'angle

$$\cos(\theta) = \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{x_1 \cdot y_1}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} + \frac{x_2 \cdot y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

$$= \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

$$\theta = \mathrm{Arcos}\left(\frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}\right)$$

Produit scalaire

On définit le ***produit scalaire*** entre 2 vecteurs de manière suivante

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$$

Avec cette définition, nous obtenons que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Exercice

Montrez que $\|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$

Preuve

$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2$

Or

$\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 = x_1^2 + x_2^2 = \|\vec{x}\|^2.$

Exercice

Montrez que $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta)$

Preuve

Partons du sens inverse, et notons que, comme nous l'avons vu précédemment, $\cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$

Alors

$$\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta) = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Autres relations

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,
- $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$,
- $\lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda\vec{y})$,
- Si $\vec{x} \neq \vec{0}$ alors $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$,
- Si $\vec{x} = \vec{0}$ si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

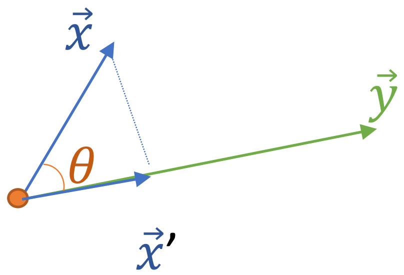
- $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

On peut en déduire que

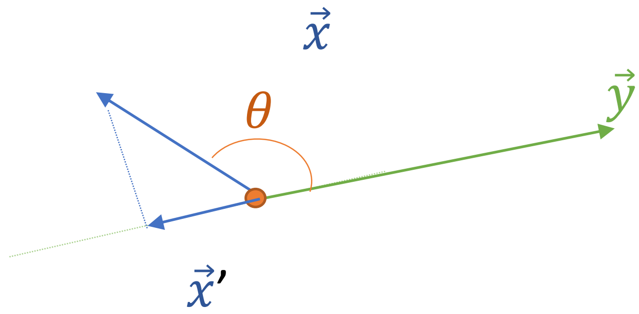
- $-1 \leq \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \leq 1$ (rappelons que $\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \cos(\theta)$)

Interprétation géométrique

θ angle aigu



θ angle obtus



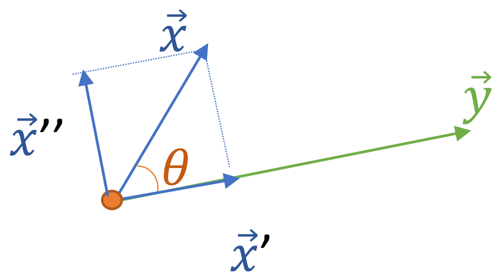
Si $\vec{x}'$ est la projection orthogonale de $\vec{x}$ sur $\vec{y}$, alors

$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}'\| \cdot \|\vec{y}\|$ si θ est un angle aigu ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) et

$\vec{x} \cdot \vec{y} = -\|\vec{x}'\| \cdot \|\vec{y}\|$ si θ est un angle aigu ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$).

Le cas particulier est $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Composantes



$\vec{x}'$ est la ***projection orthogonale*** de $\vec{x}$ sur $\vec{y}$, et $\vec{x}''$ est la composante perpendiculaire de $\vec{x}$. Alors on a les relations suivantes

$\vec{x}' = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \vec{y}$ et $\|\vec{x}'\| = \frac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{\|\vec{y}\|^2}$ et

$\vec{x}'' = \vec{x} - \vec{x}' = \vec{x} - \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \cdot \vec{y}$ et $\|\vec{x}''\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 - \left(\frac{|\vec{x}\cdot\vec{y}|}{\|\vec{y}\|^2}\right)^2}$

Exercice

Les paires de vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

- $\vec{x} = (2, 7)$ et $\vec{y} = (-8, 2)$,
- $\vec{x} = (1, 7)$ et $\vec{y} = (-21, 3)$,
- $\vec{x} = (-1, 5, 2)$ et $\vec{y} = (4, -2, 7)$.

Corrigé

Par définition, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux si $\theta = \pi/2$, donc si $\cos(\theta) = 0$.
Or, pour deux vecteurs non-nuls, on a que
$\cos(\theta) = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|} = 0$ si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.
Il suffit donc de calculer les produits scalaires et vérifier s'ils valent 0. Si oui, les vecteurs sont orthogonaux, sinon, ils ne le sont pas !

- $(2, 7) \cdot (-8, 2) = -16 + 14 = -2 \neq 0$ => NON, pas orth.
- $(1, 7) \cdot (-21, 3) = -21 + 21 = 0$ => OUI, ils sont orth.
- $(-1, 5, 2) \cdot (4, -2, 7) = -4 - 10 + 14 = 0$ => OUI, ils sont orth.

Exercice

Calculez l'angle entre les vecteurs suivants :
$\vec{x} = (2, 3)$ et $\vec{y} = (5, 1)$.

Corrigé

Rappelons que que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Or, $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

Or, $\|\vec{y}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

Et $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 13$

Donc $\cos(\theta) = \frac{13}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13^2 \cdot 2}} = \frac{13}{13 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Il s'agit donc de trouver

$\theta = \mathrm{Arcos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Addition et multiplication par un scalaire

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel, alors

- $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,
- $\vec{z} = \lambda \cdot \vec{x} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \lambda \cdot x_3)$

Les propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire sont valables (commutativité, associativité, existence de l'élément neutre, distributivité, élément absorbant, …)

Corps commutatif

Un ***corps commutatif*** est un ensemble K muni de deux opérateurs :

l'*addition* $+ : K \to K$ et

la *multiplication* $\cdot : K \to K$.

De plus, on a que

$0 \in K$ (élément neutre de l'addition),

$1 \in K$ (élément neutre de la multiplication),

$+$ et $\cdot$ vérifient les propriétés usuelles (commutatif, associatif,…)

Les éléments de K sont appelés des *scalaires*.

Espace vectoriel

Un ***espace vectoriel*** de dimension n est un ensemble $E = K^n$ est l'ensemble des points suivants :

$$E = K^n = \{\vec{x} = (x_1, \dots, y_n) | y_i \in K, i = 1, \dots, n\}.$$

E muni de deux opérateurs :

l'*addition* $+ : E \rightarrow E$ et

la *multiplication scalaire* $\cdot : K \times E \rightarrow E$.

Les éléments de E sont appelés des ***vecteurs***.

Exemples d'espaces vectoriels

- L'ensemble des réels $\mathbb{R}^n$,
- L'ensemble des entiers $\mathbb{Z}^n$,
- L'ensemble binaire $\{0, 1\}^n$,
- L'espace des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muni de la somme et de la multiplication scalaire suivants, avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Remarques

- Un vecteur $\vec{x}$ unique engendre droite D. L'ensemble $\{\vec{0}\} \cup D$ est un espace vectoriel à 1 dimension.

- Deux vecteurs linéairement indépendants $\vec{x}$ et $\vec{y}$ engendrent un plan Π. L'ensemble $\{\vec{0}\} \cup \Pi$ est un espace vectoriel à 2 dimension.

- Trois vecteurs linéairement indépendants engendrent un espace de dimension 3.

Note: la dimension du vecteur doit être au moins aussi grande que l'espace engendré !

Exercice

- Soit $K = \{0, 1\}$ l'ensemble des bits,
- Trouvez les opérateurs de K un corps commutatif.

Exercice - Corrigé

- Définissons l'addition OR $||\ : K \ \rightarrow K$ tel que

$0||0 = 0, 1||0 = 1, 0||1 = 1, 1||1 = 1$

On vérifie aisément que$||$possède l'élément neutre 0 et qu'il est commutatif et associatif.

- Définissons la multiplication AND $\&\ : K \ \rightarrow K$ tel que

$0\&0 = 0, 1\&0 = 0, 0\&1 = 0, 1\&1 = 1$

On vérifie aisément que $\&$ possède l'élément neutre 1 et qu'il est distributif par rapport à$||$.

$\{\{0,1\}, ||, \&\}$ est donc un corps commutatif.

Exercice - Remarque

- Cela fonctionne aussi avec l'addition XOR $\oplus: K \ \rightarrow K$ tel que $0 \oplus 0 = 0, 1 \oplus 0 = 1, 0 \oplus 1 = 1, 1 \oplus 1 = 1.$

En effet, on peut écrire $\oplus$ en fonction de || et $\&$ de la manière suivante :

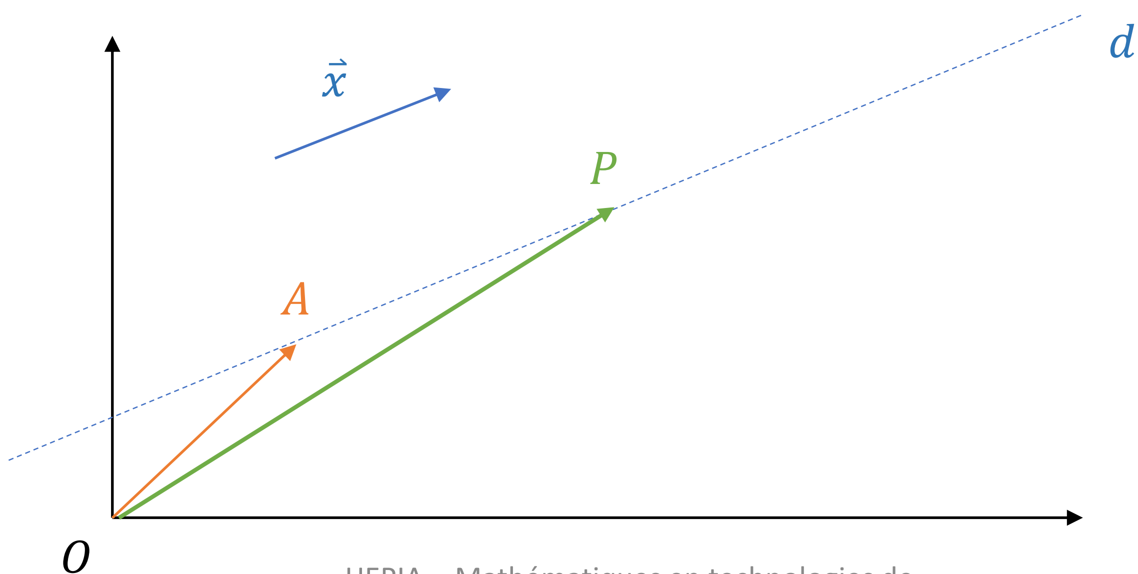
$$x \oplus y = (\bar{x} \,\&\, \bar{y}) \,\&\, (x + y)$$

avec $\bar{x} = \begin{cases} 1 \; si \; x = 0 \\ 0 \; si \; x = 1 \end{cases}$ est l'opérateur d'inversion.

$x \oplus y$ est donc une combinaison linéaire de x et y. Donc, comme $\{K, ||, \&\}$ est un corps commutatif, $\{K, \oplus, \&\}$ le sera aussi.
Le même raisonnement s'applique pour l'espace vectoriel K^n.

Equations vectorielles de la droite

Nous avons vu qu'une droite est uniquement définie par deux points.
Un vecteur $\vec{x}$ est uniquement déterminé par sa direction, sa longueur et son sens (représenté ici dans une base orthonormée quelconque). Il nous suffit donc de connaître un point A par lequel passe une droite pour décrire tout autre point P de celle-ci.



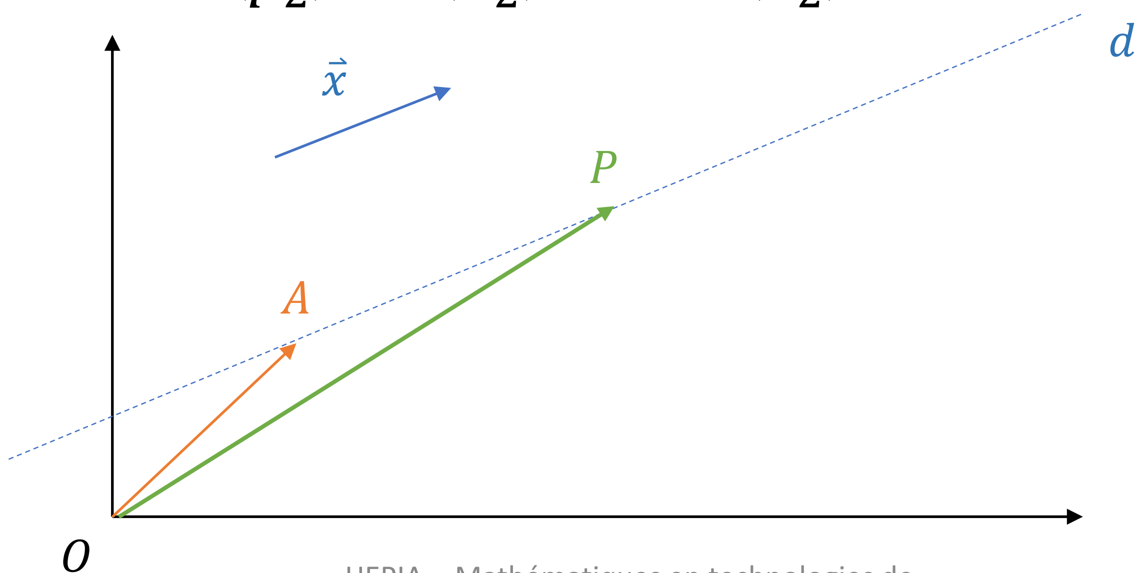
Equations vectorielles de la droite

En notation par segments, cela nous donne

$$\overline{OP} = \overline{OA} + t \times \vec{x}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Ce qui peut également s'écrire

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



Equations vectorielles de la droite

Nous appelons ***équations paramétriques*** d'une droite le système d'équations suivantes :

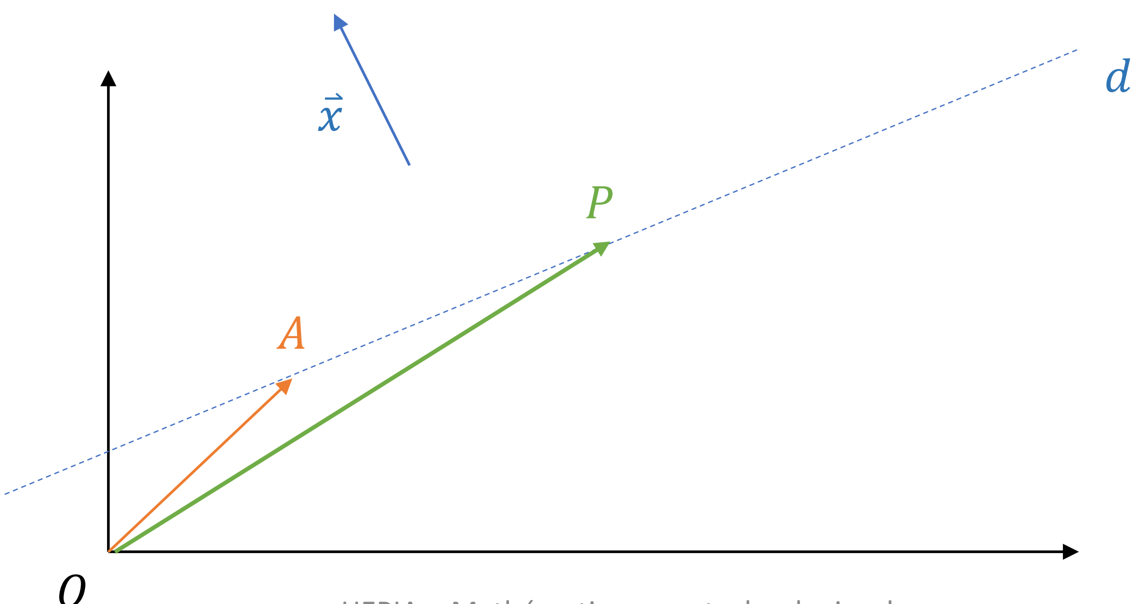
$$\begin{cases} p_1 = a_1 + t \times x_1 \\ p_2 = a_2 + t \times x_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Ce qui donne, en isolant t, l'***équation cartésienne*** suivante :

$$p_1 x_2 - p_2 x_1 + a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$$

Equations vectorielles de la droite

Etant donné un vecteur $\vec{x}$, il n'existe qu'une seule direction orthogonale à ce dernier. Donc, nous pouvons à nouveau définir une droite, cette fois-ci avec un vecteur orthogonal à la droite :



Equations vectorielles de la droite

Par la définition du produit scalaire, nous savons que

$$\overline{AP} \cdot \vec{x} = 0$$

Or $\overline{AP} = \overline{OP} - \overline{OA}$, d'où la relation suivante :

$$\overline{AP} \cdot \vec{x} = (\overline{OP} - \overline{OA}) \cdot \vec{x} = \overline{OP} \cdot \vec{x} - \overline{OA} \cdot \vec{x}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = p_1 x_1 + p_2 x_2 \overbrace{- a_1 x_1 - a_2 x_2}^{\text{Constante } c}$$

$$= p_1 x_1 + p_2 x_2 + c = 0$$

C'est bien l'équation d'une droite, car….

Equations de la droite

Une droite d est définie par l'ensemble des points suivants :

$$d = \{(p_1, p_2) | a \times p_1 + b \times p_2 + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

Cette droite a pour vecteur directeur $\vec{d} = \binom{-b}{a}$ et si $b \neq 0$, la pente de la droite est $\frac{a}{b}$.

NOTE: en réarrangeant et en remplaçant $p_1 \to x$ et $p_2 \to -y$ on obtient bien une équation de la forme

$$y = \frac{b}{a} x + c.$$

Exercice

Trouvez l'équation de la droit passant par le point $A = \binom{1}{5}$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{d} = \binom{-3}{2}$.

Quelle est sa pente ?

Exercice - Corrigé

Selon la formule vectorielle, nous avons que tout point $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ de la droite peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3t \\ 5 + 2t \end{pmatrix}$$

En éliminant t dans le système d'équations suivant, on obtient

$$t = \frac{1 - p_1}{3} = \frac{p_2 - 5}{2}$$

Et donc en multipliant par -6 des deux côtés et en déplaçant les termes on obtient l'équation de la droite

$$2p_1 + 3p_2 - 17 = 0$$

La pente est définie par $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ car est $b = 3 \neq 0$!

Géométrie vectorielle dans $\mathbb{R}^3$

Notez que dans $\mathbb{R}^3$, nous utilisons la notation suivante :

<u>Le vecteur :</u> $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

<u>La norme :</u> $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,

<u>Le produit scalaire :</u> $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$.

Equations de la droite dans $\mathbb{R}^3$

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$, nous avons vu que l'ensemble des points définis par une équation du type $a \times p_1 + b \times p_2 + c = 0$ est une droite.

Que représente l'ensemble des points qui satisfont une équation du même type dans $\mathbb{R}^3$:

$$a \times p_1 + b \times p_2 + c \times p_3 + d = 0\ ?$$

<u>Réponse:</u> Il ne s'agit plus d'une droite, mais d'un plan !

Le produit vectoriel

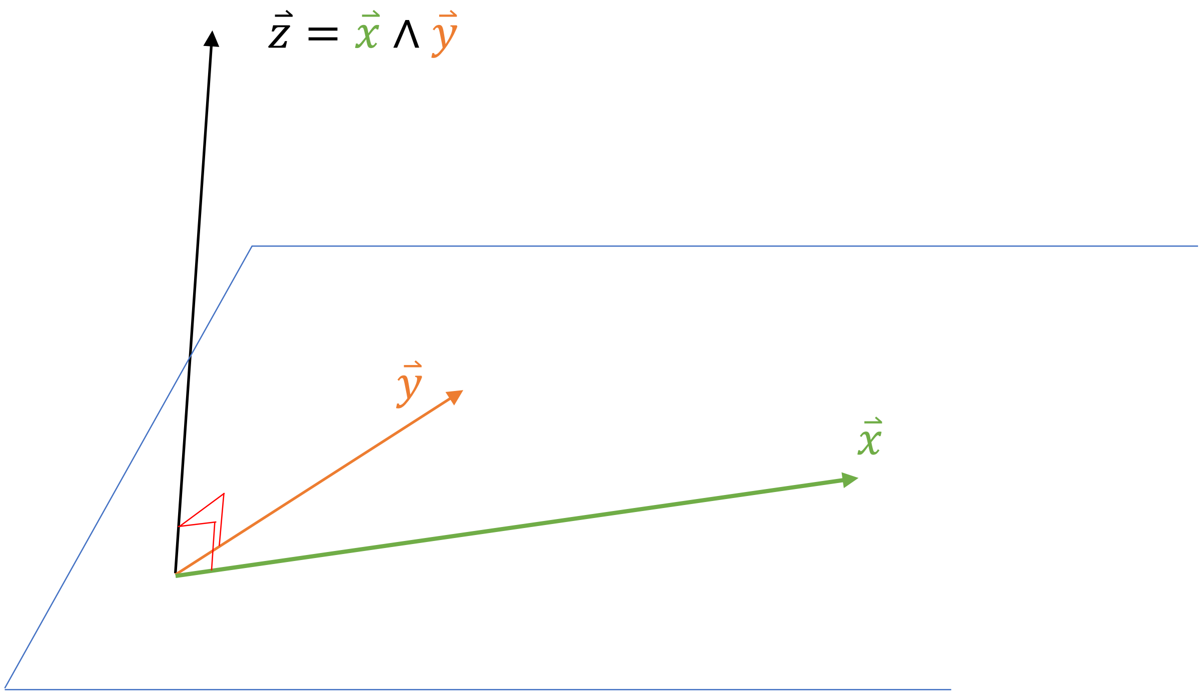
Nous avons déjà vu 2 types de multiplications avec les vecteurs, nous en introduisons ici un troisième : le ***produit vectoriel***.

Multiplication par un scalaire	Produit scalaire	Produit vectoriel
$\lambda \times \vec{x}$	$\vec{x} \cdot \vec{y}$	$\vec{x} \wedge \vec{y}$
$\times\colon\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$	$\cdot\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}$	$\wedge\colon\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3$
Un scalaire multiplie un vecteur, le résultat est un ***vecteur*** !	Un vecteur multiplié par un autre vecteur, le résultat est un ***scalaire*** !	Un vecteur multiplié par un autre vecteur, le résultat est un ***vecteur*** !

<u>ATTENTION :</u> le produit vectoriel n'a pas de sens dans $\mathbb{R}^2$!! Nous allons voir pourquoi !

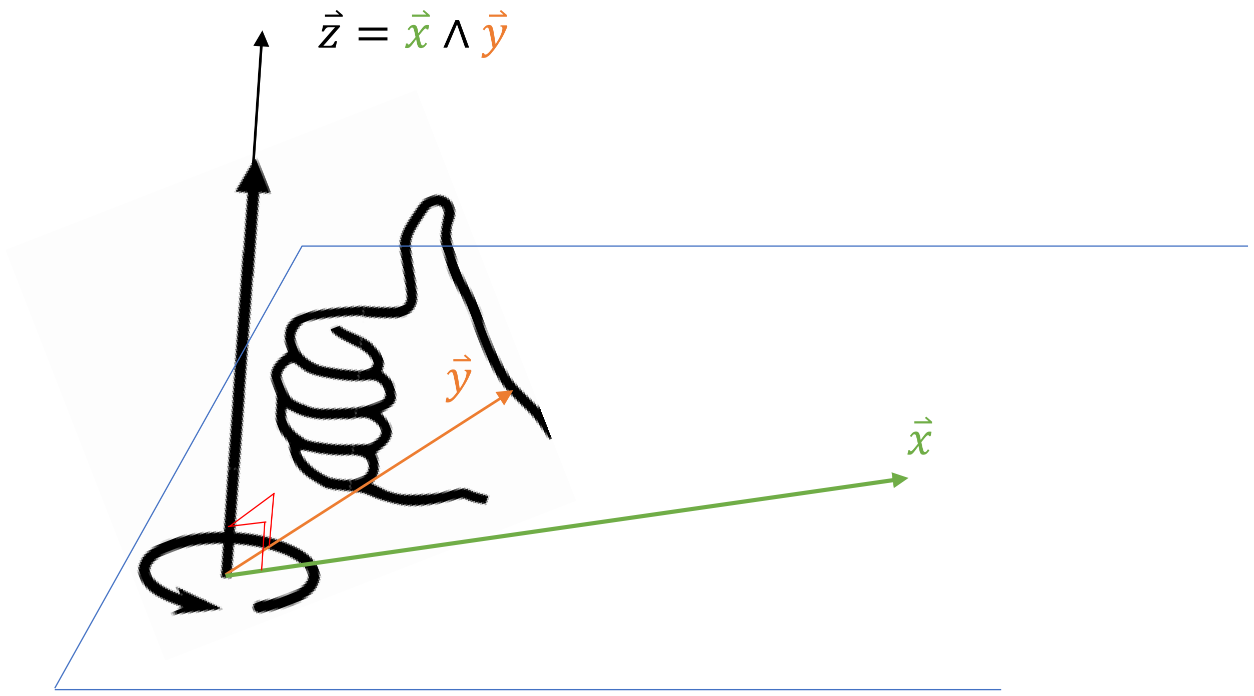
Le produit vectoriel

Nous avons déjà vu 2 types de multiplications avec les vecteurs, nous en introduisons ici un troisième : le ***produit vectoriel***.



Règle du tire-bouchon

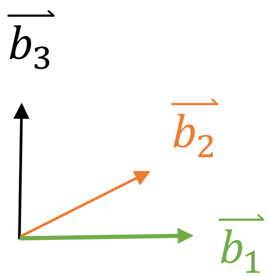
Il est important de noter dans quel sens le vecteur perpendiculaire se dirige – on applique pour cela la règle du tire-bouchon !



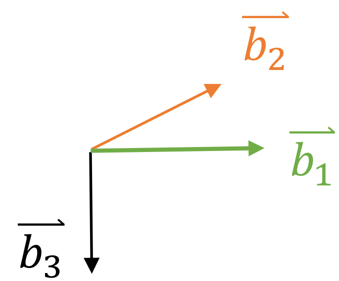
Base directe vs indirecte

L'ordre des vecteurs de base importe. Nous noterons deux types de bases $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \overrightarrow{b_3})$ – les bases ***directes*** et les bases ***indirectes*** :

Base directe : $\overrightarrow{b_3} = \overrightarrow{b_1} \wedge \overrightarrow{b_2}$



Base indirecte : $\overrightarrow{b_3} = -\overrightarrow{b_1} \wedge \overrightarrow{b_2}$



Produit vectoriel

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ alors on définit le produit vectoriel par

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_2 \times y_3 - x_3 \times y_2 \\ x_3 \times y_1 - x_1 \times y_3 \\ x_1 \times y_2 - x_2 \times y_1 \end{pmatrix}$$

Equations paramétriques d'une droite

Soit une droite de direction $\vec{d} = (d_1, d_2, d_3)$ et passant par le point $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Alors pour tout point $X = (x_1, x_2, x_3)$ de la droite on a que

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \times \vec{d}, t \in \mathbb{R}.$$

Cela s'écrit aussi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \times \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Equation paramétrique d'une droite

Après isolation de la constante t, cela nous donne le système d'équations suivantes :

$$t = \frac{x_1 - a_1}{d_1} = \frac{x_2 - a_2}{d_2} = \frac{x_3 - a_3}{d_3},$$

Note : nous avons ici que $d_1 \neq 0$, $d_2 \neq 0$ et $d_3 \neq 0$.

En utilisant $t = t + t - t$ nous obtenons que tout point de la droite satisfait

$$t = \frac{x_1 - a_1}{d_1} - \frac{x_2 - a_2}{d_2} + \frac{x_3 - a_3}{d_3}.$$

Exercice

1. Calculez l’équation de la droite passant par le point $(2, -1, 3)$ et de direction $(1, \frac{1}{2}, -2)$.

2. Calculez le point d’intersection de cette droite avec le plan $z = 0$.

Exercice

1. Selon les équations précédentes, nous avons que

$$t = \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2 + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{x_3 - 3}{-2}$$

En posant que $t = t - t + t$ nous obtenons que :

$$t = x_1 - 2x_2 - \frac{x_3}{2} - \frac{5}{2}.$$

Par définition, le point A est la solution pour $t = 0$ $(A + 0 \times \vec{d} = A)$. Vérifions $A = (2, -1, 3)$ nous avons bien :

$$2 - 2(-1) - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = 2 + 2 - \frac{8}{2} = 0.$$

Exercice

2. Nous devons trouver le point de la droite ci-dessus tel que $x_3 = 0$ (car se trouve sur le plan $z = 0$). Cela donnes les équations

$$t = \frac{x_1 - 2}{1} = \frac{x_2 + 1}{\frac{1}{2}} = \frac{0 - 3}{-2} = \frac{3}{2}$$

Ce qui nous donne que
$\frac{x_1-2}{1} = \frac{3}{2}$ donc $x_1 = \frac{7}{2}$ et
$2x_2 + 2 = \frac{3}{2}$ donc $x_2 = -\frac{1}{4}$

Donc le point d'intersection de la droite avec le plan $z = 0$ se fait au point $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}, 0)$.

Equations paramétriques du plan

Un plan est uniquement défini dans $\mathbb{R}^3$ par :

- 3 points non colinéaires,
- 1 point et 1 droite ne passant pas par le point,
- 2 droites non colinéaires (distinctes)
- 1 point et un vecteur orthogonal au plan (***vecteur normal***).

Nous allons ici décrire l'équation paramétrique d'un plan obtenu par un point et un vecteur orthogonal.

Notez que, par exemple, avec 3 points, nous pouvons définir 2 vecteurs et qu'avec le produit vectoriel de ces deux vecteurs, nous obtenons un vecteur orthogonal au plan !

Equations paramétriques du plan

Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$ le point et $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ le vecteur normal au plan.

Alors pour tout point $X = (x_1, x_2, x_3)$ dans le plan, nous avons que

$$\overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \\ x_3 - a_3 \end{pmatrix} \perp \vec{n},$$

Donc, par définition de l'orthogonalité, nous avons que

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0.$$

Equations paramétriques du plan

Or, $\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0$ implique que

$$(x_1 - a_1) \times n_1 + (x_2 - a_2) \times n_2 + (x_3 - a_3) \times n_3 = 0.$$

Donc

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 - n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3 = 0.$$

Nous retrouvons donc l'équation du plan du type

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + d = 0.$$

Exercice :

1. Calculez l'équation paramétrique du plan point $(2, 1, -8)$ et orthogonal au vecteur $(1, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$.

2. Quelle est l'équation paramétrique de l'intersection de ce plan avec le plan horizontal $x = -2$?

Corrigé :

1. Tout point $X = (x_1, x_2, x_3)$ du plan satisfait l'équation paramétrique suivante :

$$1x_1 + \sqrt{2}x_2 + \frac{x_3}{2} - 2 - \sqrt{2} - \frac{-8}{2} = 0,$$

Soit

$$x_1 + \sqrt{2}x_2 + \frac{x_3}{2} + 2 - \sqrt{2} = 0,$$

Vérifions que A est bien dans le plan :

$$1 \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 1 + \frac{-8}{2} + 2 - \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} - 4 + 2 - \sqrt{2} = 0\ !$$

Corrigé :

2. Nous désirons trouver l'équation paramétrique de la droite intersectant le plan $x = -2$.

Pour ce faire, il nous suffit donc de fixer $x_1 = -2$ dans l'équation paramétrique du plan, soit

$$-2 + \sqrt{2}x_2 + \frac{x_3}{2} + 2 - \sqrt{2} = 0,$$

Autrement dit, on a l'équation paramétrique de la droite suivante :

$$\sqrt{2}x_2 + \frac{x_3}{2} - \sqrt{2} = 0.$$

Equations paramétriques du plan – 3 points

Soient $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ et $C = (c_1, c_2, c_3)$ trois points non colinéaires. Nous cherchons le plan passant par ces trois points.

Calculons d'abord les deux vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs doivent être linéairement indépendants !

Equations paramétriques du plan – 3 points

Soient $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ et $C = (c_1, c_2, c_3)$ trois points non colinéaires. Nous cherchons le plan passant par ces trois points.

L'équation du plan se présente sous la forme

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0.$$

Comme nos 3 points font partie de ce plan, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + \delta = 0 \end{cases}$$

Equations paramétriques du plan – 3 points

L'équation du plan se présente sous la forme

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0.$$

Comme nos 3 points font partie de ce plan, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 + \delta = 0 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 + \delta = 0 \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 + \delta = 0 \end{cases}$$

Il nous faut trouver les constantes α, β et γ pour trouver l'équation du plan. Notez qu'il existe une infinité d'équations du plan (une pour chaque valeur de $\delta \in \mathbb{R}$).

Exercice :

Trouvez une équation paramétrique du plan passant par les points $A = (1, -1, 3)$, $B = (3,1, 2)$ et $C = (3,2, 1)$.

Corrigé :

Le système d'équations à résoudre est points $A = (1, -1, 3)$, $B = (3,1,2)$ et $C = (3,2,1)$.

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 0 \end{cases}$$

En soustrayant les 2 dernière lignes on obtient
$(3-3)\alpha + (1-2)\beta + (2-1)\gamma + (1-1)\delta = 0$, donc $\gamma = \beta$.

Remplaçons partout, cela donne

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 3\beta + \delta = \alpha + 2\beta + \delta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\beta + \delta = 3\alpha + 3\beta + \delta = 0 \\ \gamma = \beta \end{cases}$$

Corrigé :

Soustrayons 3x la ligne 1 à la ligne 2 on obtient
$(-3+3)\alpha + (-6+3)\beta + (-3+1)\delta = 0$, nous avons donc que

$$\beta = -\frac{2}{3}\delta.$$

Remplaçons partout, cela donne

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}\delta \\ \beta = -\frac{2}{3}\delta \\ \gamma = -\frac{2}{3}\delta \end{cases}$$

Nous avons donc une équation paramétrique du plan qui dépend de δ – si nous choisissons une valeur (p.ex. $\delta = 3$ pour annuler les fractions), cela nous donne l'équation du plan suivante :

$$1 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 3 = 0.$$

Corrigé :

Vérifions si nos points sont bien solutions de l'équation :

Avec $A = (1, -1, 3)$

$$1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + 3 = 1 + 2 - 6 + 3 = 0.$$

Avec $B = (3,1,2)$

$$1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 - 2 - 4 + 3 = 0.$$

Avec $C = (3,2,1)$

$$1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 - 2 + 3 = 0.$$

Les trois points sont donc bien dans le plan défini par l'équation !