

Exercices Série 9

- 1) Montrez que \vec{x} et \vec{y} sont linéairement dépendants si et seulement si il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{y} = \alpha\vec{x}$
- 2) Trouvez 3 vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{R}^2 et prouvez que le 3^e vecteur trouvé peut être écrit comme combinaison linéaire des deux premiers.

Réponses

- 1) Preuve de si et seulement si => deux sens

A: \vec{x} et \vec{y} sont linéairement indépendants

B: il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{y} = \alpha\vec{x}$

A => B: par définition, si deux vecteurs sont liés, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$ tels que $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{0}$, donc $\lambda_1\vec{x} = -\lambda_2\vec{y}$.

Or, comme $\lambda_2 \neq 0$, on peut diviser par $-\lambda_2$ et on aura

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_2}\vec{x} = \vec{y}$$

Il suffit de poser $\alpha = \frac{\lambda_1}{-\lambda_2} \neq 0$ (car λ_1 et λ_2 sont non nuls). Ce qui prouve A => B !

B => A: Si $\alpha\vec{x} = \vec{y}$, posons $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = -1$, alors on a que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^*$.

De plus

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \alpha\vec{x} + (-1)\vec{y} = \vec{y} - \vec{y} = \vec{0}$$

Il existe donc une combinaison linéaire des deux vecteurs avec deux scalaires non-nuls (α et -1) qui engendrent le vecteur nul, donc que \vec{x} et \vec{y} sont linéairement dépendants.

Ce qui prouve B => A !

- 2) Par exemple $\vec{x} = (1, 2)$ $\vec{y} = (-1, 2)$ et $\vec{z} = (3, 0)$

Pour vérifier que \vec{x} et \vec{y} sont liés, nous devons trouver λ_1 et λ_2 tels que :

$\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ et $2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$. Autrement dit, on doit avoir $\lambda_1 = \lambda_2$ ET $\lambda_1 = -\lambda_2$, ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. \vec{x} et \vec{y} sont donc libres.

De manière similaire, prenons \vec{x} et \vec{z} , alors on doit avoir

$\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0$ et $2\lambda_1 = 0$. Autrement dit, on doit avoir $\lambda_1 = 0$ (de la seconde équation), ce qui implique que \vec{x} et \vec{z} sont libres. Le même raisonnement s'applique pour \vec{y} et \vec{z} .

Pour la seconde partie, nous devons trouver λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \vec{z}$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\lambda_1 \times 1 + \lambda_2 \times (-1) &= 3 \\ \lambda_1 \times 2 + \lambda_2 \times 2 &= 0\end{aligned}$$

De la seconde équation, nous tirons $\lambda_1 = -\lambda_2$, et remplaçons λ_1 par $-\lambda_2$ dans la première, nous obtenons

$$\begin{aligned}-\lambda_2 \times 1 + \lambda_2 \times (-1) &= -2\lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 &= -\lambda_2\end{aligned}$$

Donc, nous avons $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{3}{2}$ (qui tous deux sont non-nuls) !

Vérifions :

$$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{6}{2} - \frac{6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{z}.$$

\vec{z} peut donc bel et bien être écrit comme une combinaison linéaire de \vec{x} et \vec{y} .