Exercices Série 11

1) On définit l'inverse d'un vecteur $\vec{x}$, un vecteur $\vec{y}$ tel que $\vec{x}+\vec{y}=\vec{0}$. Quels sont les vecteurs inverses des vecteurs suivants :

   $\vec{x}=(1,2)$ $\quad$ $\vec{y}=(-1,2)$ $\quad$ $\vec{z}=(2x+3,\ 2-y)$

2) Montrez que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est un scalaire, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ est un vecteur à deux dimensions et on utilise la multiplication par un scalaire comme
$$\lambda \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix},$$
   alors $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$ ($|\lambda|$ est la valeur absolue de λ).

3) Montrez que $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ sont deux vecteurs à deux dimensions et on utilise la multiplication par un scalaire comme définie au point 2) ainsi que l'addition de deux vecteurs comme
$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix},$$
   $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$.

Réponses

1) $-\vec{x}=(-1,-2)$ $\quad$ $-\vec{y}=(1,-2)$ $\quad$ $-\vec{z}=(-2x-3,\ y-2)$

2) Utilisons d'abord la définition de la norme et mettons-la au carré :
$$\|\vec{x}\|^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2.$$
   Donc
$$\|\lambda \cdot \vec{x}\|^2 = (\lambda \cdot x_1)^2 + (\lambda \cdot x_2)^2 = \lambda^2 \cdot (x_1)^2 + \lambda^2 \cdot (x_2)^2 = \lambda^2 \cdot [(x_1)^2 + (x_2)^2] = \lambda^2 \cdot \|\vec{x}\|^2.$$
   En prenant la racine aux deux extrémités de la suite des équations précédentes, nous obtenons
$$\|\lambda \cdot \vec{x}\| = \sqrt{\lambda^2} \cdot \|\vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|,$$
   car comme la norme est TOUJOURS positive, il nous faut $\sqrt{\lambda^2}$ soit la racine POSITIVE (or il se peut que $\lambda < 0$ et donc, la racine positive sera $|\lambda|$).

   CQFD.

3) En utilisant la définition de l'addition de deux vecteurs, nous avons que

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

CQFD.